**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 10 класс, решения**

**Время выполнения 180 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 1. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. В аудитории меньше студентов. Как-то преподаватель Александр Иванович заметил, что вероятность выбора девочки, которая получает стипендию, среди всех девочек в аудитории равна , а вероятность выбора мальчика, который получает стипендию, среди всех мальчиков в аудитории равна . Сколько в аудитории студентов, получающих стипендию?

**Ответ.**

**Решение.** По условию вероятность выбора девочки, получающей стипендию, среди всех девочек равна , что равно отношению количества девочек, получающих стипендию, к общему количеству девочек в аудитории. Учитывая, что количество девочек – натуральное число и их меньше , находим, что в аудитории либо девочек ( получают стипендию), либо ( получают стипендию). По условию отношение количества мальчиков, получающих стипендию, к общему количеству мальчиков равно . Следовательно, в аудитории либо мальчиков ( получают стипендию), либо мальчика ( получают стипендию). Так как в аудитории меньше студентов, определяем, что в аудитории девочек ( получают стипендию) и мальчиков ( получают стипендию). Значит, в аудитории получают стипендию студентов.

***Комментарий.*** *Обоснованно получен правильный ответ – 7 баллов. Получен правильный ответ, но в решении не учтены все возможные варианты количеств мальчиков и девочек в аудитории – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев – 0 баллов.*

2. Для приведённых квадратных трехчленов и известно, что . Найдите , если известно, что .

**Ответ.**

**Решение.** Пусть , . Согласно условию,

и

Складывая эти два равенства, получаем, что , т.е. . Вычитая одно из другого, получаем, что . Теперь вспомним, что , откуда . Следовательно,

.

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

3. Окружность проходит через вершину прямоугольника и касается его сторон и в точках и соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если расстояние от точки до прямой равно .

**Ответ.** .

**Решение.** Пусть – основание высоты из точки на прямую .Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую отсекает хорда, а вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается. Следовательно, углы и равны, так как оба равны половине дуги . Значит, прямоугольные треугольники и подобны и . Аналогично, из подобия треугольников и можем записать . Перемножим почленно два полученных равенства, получим . Значит, площадь четырехугольника равна .

***Комментарий.*** *Любое полное верное решение – 7 баллов. Доказано подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но площадь четырехугольника ABCD не найдена или вычислена ошибочно – 5 баллов. В работе упомянуто возможное подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но не доказано или неправильно доказано, далее решение закончено и получен правильный ответ – 3 балла. В работе упомянуто возможное подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но не доказано или неправильно доказано, дальнейших продвижений нет – 2 балла. Только правильный ответ без доказательства – 1 балл. Любое незаконченное или ошибочное решение – 0 баллов.*

4. Сколько существует натуральных чисел , для которых число является полным квадратом?

**Ответ.** Два.

**Решение.** Пусть , причем – целое число. Очевидно, что . Если – отрицательно, то также равно ; поэтому дальше будем считать, что , причем натуральное. Из равенства получаем . Используя формулу для разложения разности квадратов, имеем . Так как – натуральное число, то второй множитель слева в последнем равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и первый множитель. Число можно разложить на натуральные множители двумя способами: . При этом, так как , то . Таким образом, возможны только два случая:

или

Решая первую систему уравнений (удобнее всего просто сложить уравнения), получаем, что , откуда . Аналогично из второй системы получается, что . Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями , но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, так как возможны еще варианты .

***Комментарий.*** *Получен верный ответ с полным обоснованием – 7 баллов. Не рассмотрены случаи разложения 15 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – 6 баллов. Верно составлены системы для определения n, но не проверено, что они имеют натуральные решения – 4 балла. Разумные соображения, не приведшие к решению – 1-2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. Дима и Коля играют в следующую игру. На столе лежит куча из камней. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Дима. Делая ход, играющий берёт со стола или камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать камень. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

**Ответ.** Коля.

**Решение.** Опишем стратегию Коли. Первым ходом он дополнит ход Димы так, чтобы после хода Коли осталось камней. Отметим, что делится на . Дальше Коля будет действовать так, чтобы за две пары ходов было взято ровно камней. Дима своими двумя ходами сможет в сумме взять или камня, поэтому Коля сначала возьмет камня (это не наложит ограничений на его второй ход), а потом, когда уже будет знать, что сделал Дима, дополнит его ход до в сумме. При разборе каждой семерки последний ход остается за Колей. Поэтому, в частности, он возьмет последний камень и выиграет.

***Комментарий.*** *Любое полное верное решение – 7 баллов. Типичное решение должно содержать описание стратегии Коли и обоснование, почему приведённая стратегия работает против любых возможных действий Димы. В работе описана правильная стратегия Коли, которая на самом деле работает против любых возможных действий Димы, но обоснования нет – 4 балла. В работе присутствует идея дополнения до 7 в сумме, но дальнейших продвижений нет – 2 балла. Дана стратегия Коли, которая работает только против одной или нескольких возможных стратегий Димы – 1 балл (обычно в таких работах необоснованно полагают, что какие-то ходы Димы «выгоднее» других, и рассматривают только «выгодные» ходы). Сюда же относятся работы с неполнотой перебора возможных действий Димы – 1 балл. Только правильный ответ – 0 баллов.*

**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 10 класс, решения**

**Время выполнения 180 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 2. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. В а классе меньше учащихся. Как-то учительница Мария Ивановна заметила, что вероятность выбора отличницы среди всех девочек класса равна , а вероятность выбора отличника среди всех мальчиков класса равна . Сколько в а классе отличников?

**Ответ.**

**Решение.** По условию вероятность выбора отличницы среди девочек равна , что равно отношению количества девочек-отличниц к общему количеству девочек в классе. Учитывая, что количество девочек – натуральное число и их меньше , находим, что в классе либо девочек ( отличницы), либо ( отличниц). По условию отношение количества мальчиков-отличников к общему количеству мальчиков равно . Следовательно, в классе либо мальчиков ( отличника), либо мальчика (  
отличников). Так как в классе меньше человек, определяем, что в классе   
девочек ( отличницы) и мальчиков ( отличника). Значит, в классе количество  
отличников .

***Комментарий.*** *Обоснованно получен правильный ответ – 7 баллов. Получен правильный ответ, но в решении не учтены все возможные варианты количеств мальчиков и девочек в аудитории – 5 баллов. Верный ответ без обоснования – 1 балл. Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных критериев – 0 баллов.*

2. Для приведённых квадратных трехчленов и известно, что . Найдите , если известно, что .

**Ответ.**

**Решение.** Пусть , . Согласно условию,

и

Складывая эти два равенства, получаем, что , т.е. . Вычитая одно из другого, получаем, что . Теперь вспомним, что , откуда . Следовательно,

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 2 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов.*

3. Окружность проходит через вершину прямоугольника и касается его сторон и в точках и соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если расстояние от точки до прямой равно .

**Ответ.** .

**Решение.** Пусть – основание высоты из точки на прямую .Угол между касательной и хордой равен половине дуги, которую отсекает хорда, а вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается. Следовательно, углы и равны, так как оба равны половине дуги . Значит, прямоугольные треугольники и подобны и . Аналогично, из подобия треугольников и можем записать . Перемножим почленно два полученных равенства, получим . Значит, площадь четырехугольника равна .

***Комментарий.*** *Любое полное верное решение – 7 баллов. Доказано подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но площадь четырехугольника ABCD не найдена или вычислена ошибочно – 5 баллов. В работе упомянуто возможное подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но не доказано или неправильно доказано, далее решение закончено и получен правильный ответ – 3 балла. В работе упомянуто возможное подобие треугольников BMC и HNC, NDC и MHC, но не доказано или неправильно доказано, дальнейших продвижений нет – 2 балла. Только правильный ответ без доказательства – 1 балл. Любое незаконченное или ошибочное решение – 0 баллов.*

4. Сколько существует натуральных чисел , для которых число является полным квадратом?

**Ответ.** Два.

**Решение.** Пусть , причем – целое число. Очевидно, что . Если – отрицательно, то также равно ; поэтому дальше будем считать, что , причем натуральное. Из равенства получаем . Используя формулу для разложения разности квадратов, имеем . Так как – натуральное число, то второй множитель слева в последнем равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и первый множитель. Число можно разложить на натуральные множители тремя способами: . При этом, так как , то . Таким образом, возможны только три случая:

или или

Решая первую систему уравнений (удобнее всего просто сложить уравнения), получаем, что , откуда . Вторая система уравнений не имеет решений при натуральных . Из третьей системы получается, что . Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями , но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, так как возможны еще варианты .

***Комментарий.*** *Получен верный ответ с полным обоснованием – 7 баллов. Не рассмотрены случаи разложения 63 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – 6 баллов. Верно составлены системы для определения n, но не проверено, что они имеют натуральные решения – 4 балла. Разумные соображения, не приведшие к решению – 1-2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

5. Вова и Миша играют в следующую игру. На столе лежит куча из камней. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Вова. Делая ход, играющий берёт со стола или камня, но один и тот же игрок два раза подряд не может брать камня. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

**Ответ.** Вова.

**Решение.** Опишем стратегию Вовы. Первым ходом он возьмет камень. Это не наложит ограничений на его второй ход, поэтому он сможет дополнить ход Миши так, чтобы этого осталось камней. Дальше Вова будет действовать так, чтобы за две пары ходов было взято ровно камней. Миша своими двумя ходами сможет в сумме взять или камня, поэтому Вова сначала возьмет камень (это не наложит ограничений на его второй ход), а потом, когда уже будет знать, что сделал Миша, дополнит его ход до в сумме. При разборе каждой пятерки последний ход остается за Вовой. Поэтому, в частности, он возьмет последний камень и выиграет.

***Комментарий.*** *Любое полное верное решение – 7 баллов. Типичное решение должно содержать описание стратегии Вовы и обоснование, почему приведённая стратегия работает против любых возможных действий Миши. В работе описана правильная стратегия Вовы, которая на самом деле работает против любых возможных действий Миши, но обоснования нет – 4 балла. В работе присутствует идея дополнения до 5 в сумме, но дальнейших продвижений нет – 2 балла. Дана стратегия Вовы, которая работает только против одной или нескольких возможных стратегий Димы (обычно в таких работах необоснованно полагают, что какие-то ходы Димы «выгоднее» других, и рассматривают только «выгодные» ходы). Сюда же относятся работы с неполнотой перебора возможных действий Димы – 1 балл. Только правильный ответ – 0 баллов.*