**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 11 класс, решения**

**Время выполнения 180 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 1. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. Маша задумала число , большее и меньшее . Какое наименьшее значение принимает функция для всех из отрезка ?

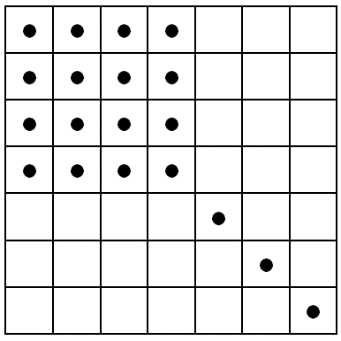
**Ответ.**.

**Решение.** Раскроем модули, тогда Наименьшее значение достигается при

***Комментарий.*** *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Есть ошибки в раскрытии модулей – снимать по 3 балла за каждую ошибку. Есть ошибки в приведении подобных членов – снимать по 2 балла за каждую ошибку. Рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры и получен верный ответ – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. В таблице расставили фишек, причем в каждой строке и каждом столбце есть хотя бы одна клетка с фишкой. Назовем строку (столбец) заполненной, если в ней находится больше половины клеток с фишками. Какое наибольшее количество заполненных строк и столбцов (в сумме) может быть в такой таблице? В каждую клетку доски можно ставить не более одной фишки.

**Ответ.**.

**Решение.** Заметим, что заполненных строк не более , поскольку если их , то уже понадобится фишек. Аналогично, не может быть более заполненных столбцов. Значит, суммарно можно получить не более заполненных столбцов и строк. Приведем пример.

***Комментарий.*** *Предложена реализация – 3 балла, сделана оценка – 4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из неповторяющихся цифр и не содержащих в записи , у которых первая цифра больше второй, вторая меньше третьей, третья больше четвёртой?

**Ответ.**.

**Решение.** Выберем четыре разные цифры и обозначим их в порядке возрастания: Из этих цифр можно составить чисел, удовлетворяющих условию: Четыре разные цифры можно выбрать числом способов Цифры упорядочиваются по возрастанию единственным способом. Из каждой четвёрки цифр можно составить чисел, то есть всего таких чисел существует

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение с верным ответом – 7 баллов. Найдено только число способов выбора четырёх цифр (126) – 2 балла; указано, что количество упорядоченных по возрастанию наборов равно 126 – 2 балла; найдено только количество чисел, состоящих из четырёх выбранных цифр и удовлетворяющих условию – 2 балла; получен ответ – 1 балл; эти баллы суммируются. Ход решения верный, но есть вычислительные ошибки – снимать по 1 баллу за каждую ошибку. За наличие потенциально полезных идей – 1-2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов.*

4. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на треугольника. Площади двух противоположных треугольников равны и . Может ли такой четырехугольник иметь площадь ?

**Ответ**. Не может.

**Решение.** Обозначим вершины четырёхугольника точку пересечения диагоналей – . Пусть площадь треугольника равна , площадь треугольника равна . Заметим, что (так как у данных треугольников одинаковая высота), и так же . Отсюда и По неравенству Коши (неравенство о средних) Площадь четырёхугольника

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений 2–3 балла.*

5. Найдите все пары натуральных чисел и , для которых и при этом – простое число.

**Ответ**., .

**Решение.** Левая часть делится на . Разложим правую часть на множители: . При получающееся уравнение относительноне имеет натуральных корней. При остальных натуральных правая часть уравнения положительна и делится на простое число . Значит, либо , либо делится на.

Если делится на , то , и сразу видно, что левая часть уравнения отрицательна и решений нет. Аналогично, если делится на и . Осталось разобраться со случаем . Подставляя , получаем квадратное уравнение , то есть . Подходит положительный корень , при этом .

***Комментарий****. Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что «либо q-1, либо 2q-1 делится на p» – 2 балла, разобран случай «q-1 делится на p» – 2 балла, разобран случай «2q-1 делится на p» – 3 балла, баллы суммируются. За наличие потенциально полезных идей – 1-2 балла. Допущены арифметические ошибки – снимать 1-2 балла. Приведен только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 11 класс, решения**

**Время выполнения 180 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 2. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. Лена задумала число , большее и меньшее . Какое наибольшее значение принимает функция для всех из отрезка ?

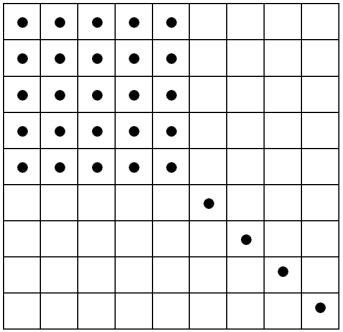
**Ответ.**.

**Решение.** Раскроем модули, тогда Наибольшее значение достигается при

***Комментарий.***  *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Есть ошибки в раскрытии модулей – снимать по 3 балла за каждую ошибку. Есть ошибки в приведении подобных членов – снимать по 2 балла за каждую ошибку. Рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры и получен верный ответ – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. В таблице расставили фишек, причем в каждой строке и каждом столбце есть хотя бы одна клетка с фишкой. Назовем строку (столбец) заполненной, если в ней находится больше половины клеток с фишками. Какое наибольшее количество заполненных строк и столбцов (в сумме) может быть в такой таблице? В каждую клетку доски можно ставить не более одной фишки.

**Ответ.**.

**Решение.** Заметим, что заполненных строк не более , поскольку если их , то уже понадобится фишек. Аналогично, не может быть более заполненных столбцов. Значит, суммарно можно получить не более заполненных столбцов и строк. Приведем пример.

***Комментарий.*** *Предложена реализация – 3 балла, сделана оценка – 4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из неповторяющихся цифр и содержащих в записи , у которых первая цифра меньше второй, вторая больше третьей, третья меньше четвёртой?

**Ответ.**.

**Решение.** Выберем три разные цифры и обозначим их в порядке возрастания:Из цифр можно составить числа, удовлетворяющих условию: . Три разные цифры можно выбрать числом способов Цифры упорядочиваются по возрастанию единственным способом. Из каждой четвёрки цифр можно составить числа, то есть всего таких чисел существует

***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение с верным ответом – 7 баллов. Найдено только число способов выбора четырёх цифр (84) – 2 балла; указано, что количество упорядоченных по возрастанию наборов равно 84 – 2 балла; найдено только количество чисел, состоящих из четырёх выбранных цифр и удовлетворяющих условию – 2 балла; получен ответ – 1 балл; эти баллы суммируются. Ход решения верный, но есть вычислительные ошибки – снимать по 1 баллу за каждую ошибку. За наличие потенциально полезных идей – 1-2 балла. Приведен только ответ – 0 баллов.*

4. Выпуклый четырёхугольник разделён диагоналями на треугольника. Площади двух противоположных треугольников равны и 9. Может ли такой четырехугольник иметь площадь 20?

**Ответ**. Не может.

**Решение.** Обозначим вершины четырёхугольника точку пересечения диагоналей – . Пусть площадь треугольника равна 4, площадь треугольника равна 9. Заметим, что (так как у данных треугольников одинаковая высота), и так же . Отсюда и По неравенству Коши (неравенство о средних) Площадь четырёхугольника

***Комментарий.*** *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном доказательстве имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений 2–3 балла.*

5. Найдите все пары натуральных чисел и , для которых и при этом – простое число.

**Ответ**. , .

**Решение.** Левая часть делится на . Разложим правую часть на множители: . При получающееся уравнение относительноне имеет натуральных корней. При остальных натуральных правая часть уравнения положительна и делится на простое число . Значит, либо , либо делится на.

Если делится на , то , и сразу видно, что левая часть уравнения отрицательна и решений нет. Аналогично, если делится на и . Осталось разобраться со случаем . Подставляя , получаем квадратное уравнение , то есть . Подходит положительный корень , при этом .

***Комментарий****. Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что «либо q-1, либо 2q+1 делится на p» – 2 балла, разобран случай «q+1 делится на p» – 2 балла, разобран случай «2q+1 делится на p» – 3 балла, баллы суммируются. За наличие потенциально полезных идей – 1-2 балла. Допущены арифметические ошибки – снимать 1-2 балла. Приведен только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*