**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 8 класс, решения**

**Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 1. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. В каких пределах меняется , если и ?

**Ответ.** .

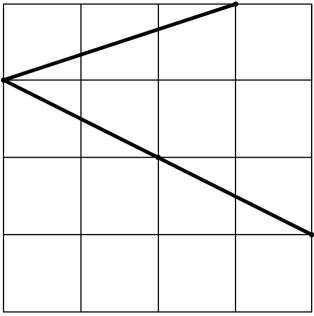
**Решение.** Так как , то . Поэтому и .

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Приведены разумные соображения, не доведенные до верного ответа – 3-4 балла. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Цифры трёхзначного числа различны и идут в возрастающем порядке (слева направо). Сумма цифр числа равна , а разность между цифрами десятков и сотен на больше, чем разность между цифрами единиц и десятков. Определите, какая цифра у этого числа стоит в разряде десятков.

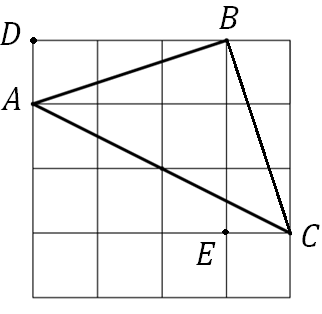
**Решение.** Пусть – исходное число. Из условия следует, что *,* откуда . Так как , то . Следовательно, *.*

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлены уравнения по условию задачи – 3 балла, из уравнений найдена цифра в разряде десятков – 4 балла, баллы суммируются. Приведен только верный ответ, либо ответ получен рассмотрением конкретных чисел – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. На клетчатой бумаге с размером клетки нарисован угол. Найдите его градусную величину без использования измерительных инструментов.

**Ответ.** .

**Решение.** Соединим две «крайние» точки отрезком (как на рисунке). Получившийся треугольник – равнобедренный, так как две его стороны и являются диагоналями трёхклеточных прямоугольников. Диагональ делит угол прямоугольника с вершиной на два угла, дополняющих друг друга до прямого. Треугольники и равны по двум катетам, значит, равны их соответствующие углы. И значит, угол дополняет угол до прямого. Таким образом, треугольник – равнобедренный и прямоугольный. Его углы и при основании равны по свойству равнобедренного треугольника и имеют величину по теореме о сумме углов треугольника.



***Комментарий.*** *Приведено верное обоснованное решение – 7 баллов. Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ – 5 баллов. Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения – 3 балла. Приведен верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием – 0 баллов.*

4. На доске в ряд записаны числа . Сколькими способами можно стереть одно число с доски так, чтобы произведение оставшихся чисел было квадратом некоторого целого числа?

**Ответ.**  способов.

**Решение.** Заметим, что произведение всех данных чисел равно степени числа с показателем, равным сумме всех целых чисел от до . Чтобы эта степень была квадратом целого числа, надо чтобы показатель был чётным числом. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы вычеркнуть из суммы одно слагаемое так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётной. Но в этой сумме нечётных слагаемых и чётных, значит, она чётна (сумма любого количества чётных слагаемых чётна, а сумма нечётных слагаемых чётна только если их чётное число). Итак, чтобы получить чётный показатель степени, из суммы надо удалить любое чётное слагаемое (а из данного произведения – любой сомножитель с чётным показателем степени), следовательно, имеется способов.

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Установлено, что «показатель должен быть чётным числом» – 2 балла, доказано, что «надо удалить любое чётное слагаемое» – 4 балла, верно подсчитано количество способов «удаления» – 1 балл, баллы суммируются. Приведен только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1-3 балла.*

5. Вася, Коля, Петя, Саша и Толя собрались, чтобы выяснить, кто съел последнюю конфету из вазы. Известно, что это был кто-то один. «Конфету съел не я и не Коля» – сказал Вася. «Это не я и не Саша» – сказал Коля. «Это не я и не Коля» – сказал Петя. «Конфету съел Вася или Толя» – сказал Саша. «Я не знаю, кто съел конфету» – сказал Толя. Оказалось, что только два мальчика сказали правду, а остальные – солгали. Знал ли Толя на самом деле, кто съел последнюю конфету из вазы?

**Ответ.** Да, знал.

**Решение.** Составим таблицу, где будет указано, является ли утверждение каждого правдой или ложью в зависимости от того, кто съел конфету. Если конфету съел Вася или Толя (первая и пятая строка), то правдивых высказываний как минимум , то есть эти варианты невозможны. Если конфету съел Коля (вторая строка), то ложных высказываний хотя бы , а это больше, чем нужно. Остаются варианты, когда конфету съел Петя или Саша (третья и четвертая строка), в обоих вариантах два высказывания правдивы и два ложны, значит, высказывание Толи должно быть третьим ложным, то есть Толя всё-таки знал, кто съел последнюю конфету.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Конфету съел | Вася | Коля | Петя | Саша | Толя |
| Вася | ложь | правда | правда | правда | ? |
| Коля | ложь | ложь | ложь | ложь | ? |
| Петя | правда | правда | ложь | ложь | ? |
| Саша | правда | ложь | правда | ложь | ? |
| Толя | правда | правда | правда | правда | ? |

***Комментарий.*** *Получен верный ответ, который верно обоснован любым из способов – 7 баллов. Разобраны не все случаи – не более 4 баллов. Приведен только верный ответ – 0 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

**Всероссийская олимпиада школьников. Школьный этап 2019/20 уч.г.**

**Математика, 8 класс, решения**

**Время выполнения 90 мин. Максимальное кол-во баллов - 35**

**Вариант 2. Все задания по 7 баллов.**

**Критерии оценивания заданий.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям.***

1. В каких пределах меняется , если и ?

**Ответ.** .

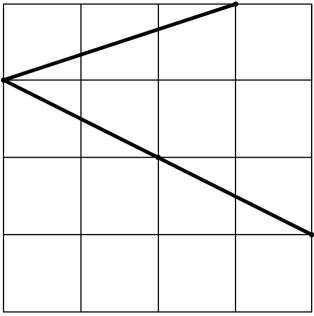
**Решение.** Так как , то . Поэтому и .

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Приведены разумные соображения, не доведенные до верного ответа – 3-4 балла. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. Цифры трёхзначного числа различны и идут в возрастающем порядке (слева направо). Сумма цифр числа равна , а разность между цифрами десятков и сотен на больше, чем разность между цифрами единиц и десятков. Определите, какая цифра у этого числа стоит в разряде десятков.

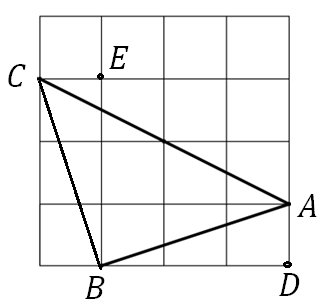
**Решение.** Пусть – исходное число. Из условия следует, что *,* откуда . Так как , то . Следовательно, *.*

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлены уравнения по условию задачи – 3 балла, из уравнений найдена цифра в разряде десятков – 4 балла, баллы суммируются. Приведен только верный ответ, либо ответ получен рассмотрением конкретных чисел – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. На клетчатой бумаге с размером клетки нарисован угол. Найдите его градусную величину без использования измерительных инструментов.

**Ответ.** .

**Решение.** Соединим две «крайние» точки отрезком (как на рисунке). Получившийся треугольник – равнобедренный, так как две его стороны и являются диагоналями трёхклеточных прямоугольников. Диагональ делит угол прямоугольника с вершиной на два угла, дополняющих друг друга до прямого. Треугольники и равны по двум катетам, значит, равны их соответствующие углы. И значит, угол дополняет угол до прямого. Таким образом, треугольник – равнобедренный и прямоугольный. Его углы и при основании равны по свойству равнобедренного треугольника и имеют величину по теореме о сумме углов треугольника.



***Комментарий.*** *Приведено верное обоснованное решение – 7 баллов. Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ – 5 баллов. Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения – 3 балла. Приведен верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием – 0 баллов.*

4. На доске в ряд записаны числа . Сколькими способами можно стереть одно число с доски так, чтобы произведение оставшихся чисел было квадратом некоторого целого числа?

**Ответ.**  способов.

**Решение.** Заметим, что произведение всех данных чисел равно степени числа с показателем, равным сумме всех целых чисел от до . Чтобы эта степень была квадратом целого числа, надо чтобы показатель был чётным числом. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы вычеркнуть из суммы одно слагаемое так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётной. Но в этой сумме нечётных слагаемых и чётных, значит, она чётна (сумма любого количества чётных слагаемых чётна, а сумма нечётных слагаемых чётна только если их чётное число). Итак, чтобы получить чётный показатель степени, из суммы надо удалить любое чётное слагаемое (а из данного произведения – любой сомножитель с чётным показателем степени), следовательно, имеется способов.

***Комментарий.*** *Любое верное обоснованное решение – 7 баллов. Установлено, что «показатель должен быть чётным числом» – 2 балла, доказано, что «надо удалить любое чётное слагаемое» – 4 балла, верно подсчитано количество способов «удаления» – 1 балл, баллы суммируются. Приведен только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1-3 балла.*

5. Вера, Катя, Настя, Света и Таня собрались, чтобы выяснить, кто купил последнее платье из новой коллекции в магазине. Известно, что это был кто-то один. «Платье купила не я и не Катя» – сказала Вера. «Это не я и не Света» – сказала Катя. «Это не я и не Катя» – сказала Настя. «Платье купила Вера или Таня» – сказала Света. «Я не знаю, кто купил платье» – сказала Таня. Оказалось, что только две девочки сказали правду, а остальные – солгали. Знала ли Таня на самом деле, кто купил последнее платье из новой коллекции?

**Ответ.** Да, знала.

**Решение.** Составим таблицу, где будет указано, является ли утверждение каждой девочки правдой или ложью в зависимости от того, кто купил платье. Если платье купила Вера или Таня (первая и пятая строка), то правдивых высказываний как минимум , то есть эти варианты невозможны. Если платье купила Катя (вторая строка), то ложных высказываний хотя бы , а это больше, чем нужно. Остаются варианты, когда платье купила Настя или Света (третья и четвертая строка), в обоих вариантах два высказывания правдивы и два ложны, значит, высказывание Тани должно быть третьим ложным, то есть Таня всё-таки знала, кто купил последнее платье из новой коллекции.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Платье купила | Вера | Катя | Настя | Света | Таня |
| Вера | ложь | правда | правда | правда | ? |
| Катя | ложь | ложь | ложь | ложь | ? |
| Настя | правда | правда | ложь | ложь | ? |
| Света | правда | ложь | правда | ложь | ? |
| Таня | правда | правда | правда | правда | ? |

***Комментарий.*** *Получен верный ответ, который верно обоснован любым из способов – 7 баллов. Разобраны не все случаи – не более 4 баллов. Приведен только верный ответ – 0 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*